**Chủ đề**

7

**PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN**

**HỆ THỨC VI-ET VÀ ỨNG DỤNG**

# **G. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN****. HỆ THỨC VI-ET VÀ ỨNG DỤNG**

**Mục Lục**

[**G. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN** 1](#_Toc534122543)

[**Dạng 1: Giải phương trình và phương trình quy về phương trình bậc hai** 2](#_Toc534122544)

[1.1 Giải phương trình bậc hai cơ bản. 2](#_Toc534122545)

[1.2. Giải phương trình quy về phương trình bậc hai 4](#_Toc534122546)

[1.2.1. Phương trình trùng phương 4](#_Toc534122547)

[1.2.3. Giải phương trình đưa về phương trình tích. 9](#_Toc534122548)

[1.2.4. Giải phương trình chứa căn bậc hai. 11](#_Toc534122549)

[***a) Phương trình chứa căn bậc hai đơn giản (quy được về phương trình bậc hai)*** 11](#_Toc534122550)

[***b) Phương trình vô tỉ.*** 12](#_Toc534122551)

[1.2.5. Giải phương trình chứa dấu GTTĐ 13](#_Toc534122552)

[**Dạng 2: Hệ thức Vi-et và ứng dụng** 14](#_Toc534122553)

[**Dạng 3: Phương trình chứa tham số** 19](#_Toc534122554)

[**🗁. BÀI TẬP TỰ LUYỆN** 50](#_Toc534122555)

# **Dạng 1: Giải phương trình và phương trình quy về phương trình bậc hai**

## **1.1 Giải phương trình bậc hai cơ bản.**

Đối với đề toán là ***giải phương trình*** với *phương trình là phương trình bậc hai đơn giản (có dạng tổng quát )*, học sinh có thể sử dụng phương pháp đưa về giải phương trình tích, hoặc sử dụng công thức nghiệm (hoặc công thức nghiệm thu gọn) và sử dụng cách nhẩm nghiệm để giải bài toán.

**1. Định nghĩa**

*Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng , trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và .*

**2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai**

*Đối với phương trình bậc hai  và biệt thức :*

*Nếu > 0 thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt .*

*Nếu = 0 thì phương trình có nghiệm kép .*

*Nếu < 0 thì phương trình vô nghiệm.*

***Chú ý:*** *Nếu phương trình có a và c trái dấu thì > 0. Khi đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt.*

**3. Công thức nghiệm thu gọn**

*Đối với phương trình bậc hai  và , :*

*Nếu > 0 thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt *

*Nếu = 0 thì phương trình có nghiệm kép .*

*Nếu < 0 thì phương trình vô nghiệm.*

**Bài 1: *`Giải phương trình:***

a)  b) 

**Hướng dẫn giải**

a) ***Cách 1****:* Đưa về giải phương trình tích bằng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.





Vậy tập nghiệm của phương trình là 

***Cách 2:*** Sử dụng công thức nghiệm để giải phương trình bậc hai.

Ta có ; 

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt:





Vậy tập nghiệm của phương trình là 

b) *Phương pháp 1:* Đưa về giải phương trình tích bằng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử:





Vậy tập nghiệm của phương trình là 

*Phương pháp 2:* Sử dụng công thức nghiệm thu gọn ( *hoặc công thức nghiệm tổng quát*) để giải:

Ta có 



Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt:

; 

*Phương pháp 3*: Giải bằng cách nhẩm nghiệm.

Ta có  và . Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt là  và .

## **1.2. Giải phương trình quy về phương trình bậc hai**

## **1.2.1. Phương trình trùng phương**

Cho phương trình:  ( ) (1)

*Phương pháp 1: Đặt ẩn phụ:*

Đặt  (t 0) Ta được phương trình:  (2)

Nếu phương trình (2) (phương trình trung gian) có 2 nghiệm dương thì phương trình trùng phương có 4 nghiệm.

Nếu phương trình trung gian có một nghiệm dương, một nghiệm âm hoặc có nghiệm kép dương thì phương trình trùng phương có 2 nghiệm

Nếu phương trình trung gian có 2 nghiệm âm hoặc vô nghiệm thì phương trình trùng phương vô nghiệm.

*Cụ thể:*

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt  phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt 

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt phương trình (2) có một nghiệm dương và một nghiệm bằng 0

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt phương trình (2) có một một nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trái dấu 

Phương trình (1) có 1 nghiệm phương trình (2) có một nghiệm kép bằng 0 hoặc có một nghiệm bằng không và nghiệm còn lại âm



Phương trình (1) có vô nghiệm phương trình (2) vô nghiệm hoặc có hai nghiệm âm 

Nếu phương trình có 4 nghiệm thì tổng các nghiệm luôn bằng 0 và tích các nghiệm luôn bằng  .

*Phương pháp 2: Giải trực tiếp phương trình trùng phương bằng cách đưa về giải phương trình tích:*

Biến đổi đưa về dạng phương trình tích : 

**Bài 1:** Giải phương trình:  (1)

**Hướng dẫn giải**

*Cách 1:* Đặt  ( điều kiện:) phương trình (1) có dạng :

. Ta có 

 .

 (thỏa mãn điều kiện )

 (thỏa mãn điều kiện )

Với  

Với  

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm :  .

*Cách 2:*  (1)









Giải phương trình:  ta được 2 nghiệm:  .

Giải phương trình:  ta được 2 nghiệm:  .

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm:

**Bài 2:** Giải phương trình:  (1)

**Hướng dẫn giải**

Đặt  ( điều kiện:) phương trình (1) có dạng :

. Ta có 

 

 (thỏa mãn điều kiện )

 (không thỏa mãn điều kiện )

Với  

Với  (loại)

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm :  .

**Bài 3:** Giải phương trình:  (1)

**Hướng dẫn giải**

Đặt  (điều kiện:) phương trình (1) có dạng :

. Ta có 

 

 (loại vì không thỏa mãn điều kiện )

 (loại vì không thỏa mãn điều kiện )

Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

**1.2.2. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu**

***Cách giải:*** *Thực hiện các bước sau:*

*Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.*

*Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức.*

*Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.*

*Bước 4: Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thoả mãn điều kiện xác định, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.*

**Bài 1**: Giải phương trình:

a.  b. 

**Hướng dẫn giải**

a. 

ĐKXĐ : 











Ta có: 

  

Phương trình có 2 nghiệm có 2 nghiệm phân biệt :

 (thỏa mãn điều kiện)

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm:  ; 

b. 

ĐKXĐ:  và 











Ta có: 



Phương trình có 2 nghiệm :

 (loại vì không thỏa mãn ĐKXĐ)

 (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm: 

## **1.2.3. Giải phương trình đưa về phương trình tích.**

Phương pháp: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng phương trình tích sau đó giải các phương trình

Tổng quát: .

**Bài 1**: Giải phương trình

a)  b) 

c)  d) 

**Hướng dẫn giải**

a) 

 hoặc 

+) 

+) (1)

Ta có  . và  . Phương trình (1) có hai nghiệm:

 

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: 

b) 





 hoặc 

+) 

+)  hoặc 

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: ; 

c. 





 hoặc 

+)   (vô nghiệm)

+)  . Có  và 

Phương trình có 2 nghiệm:

 ; 

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm:

 ; 

d)  (1)





Giải phương trình:  ta được 2 nghiệm:  .

Giải phương trình:  ta được 2 nghiệm:  .

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm:

## **1.2.4. Giải phương trình chứa căn bậc hai.**

### ***a) Phương trình chứa căn bậc hai đơn giản (quy được về phương trình bậc hai)***

Phương pháp: Đặt ẩn phụ và biến đổi phương trình ban đầu trở thành phương trình có dạng 

**Bài 1:** Giải phương trình:

a)  b) 

**Hướng dẫn giải**

a) . Điều kiện 

Đặt  (điều kiện:  ), Khi đó phương trình đã cho trở thành:

 (1)

có và  ; 

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

(thỏa mãn điều kiện );

(thỏa mãn điều kiện );

Với  (t/m)

Với  (t/m)

KL: Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là ; 

b) . Điều kiện: 

. Đặt  , điều kiện:  .

Phương trình đã cho trở thành:  (1) có  ;  ;  . Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

(thỏa mãn điều kiện )

 (loại vì không thỏa mãn điều kiện )

Với  (t/m)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  .

### ***b) Phương trình vô tỉ.***

*Phương pháp chung là bình phương hai vế để khử dấu căn. Cần thử lại để loại trừ nghiệm ngoại lai. (ngoài ra có thể dùng cách đặt ẩn phụ đưa về phương trình không có dấu căn giống phần a – dạng ý b bài toán 1)*

*Đặc biệt phương trình: *

*Ta chỉ có thể đem bình phương hai vế để giải bài toán tương đương khi cả hai vế cùng dương.*

**Bài 1:** Giải phương trình:

a)  c) 

b)  d) 

**Hướng dẫn giải**

a) 

. Vậy phương trình đã cho có nghiệm là 

b) 



c) 



d) 





## **1.2.5. Giải phương trình chứa dấu GTTĐ**

- Ta thường xét dấu các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối trên mỗi khoảng. Giải phương trình trên mỗi khoảng đó.

- Có thể đặt ẩn phụ

**Bài 1:** Giải phương trình

a)  b) 

**Hướng dẫn giải**

a) 





Vậy phương trình có 2 nghiệm: 

***b)*** 



Vậy phương trình có 2 nghiệm: 

# **Dạng 2: Hệ thức Vi-et và ứng dụng**

a) Nếu  là hai nghiệm của phương trình ****  thì  và 

b) Muốn tìm hai số và , biết , ta giải phương trình: 

(Điều kiện để có và là )

c) Nếu thì phương trình ****có hai nghiệm 

Nếu  thì phương trình ****có hai nghiệm 

*Sử dụng hệ thức Vi-et, biến đổi biểu thức đã cho suất hiện tổng và tích các nghiệm từ đó tính được giá trị biểu thức.*

*Các hệ thức thường gặp:*

.

.

.

.

.

.

.

.

.



.





….

**Bài 1:** Gọi  là hai nghiệm của phương trình:. Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức sau:

; ; ; .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  Và  nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-et có: 

.

.

.

.

**Bài 2:** Gọi  là hai nghiệm của phương trình:. Không giải phương trình

a) Tính các giá trị của các biểu thức sau:

. .

. .

 . .

b) Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  và .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có  Và  nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Vi-et ta có: 

.

.

.

.



.

b) Ta có: 

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm là  và  là: 

**Bài 3:** Gọi  là hai nghiệm của phương trình: . Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức sau:

. .

 .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  Và  nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-et có: 



.

.

.

**Bài 4:**  Gọi  là hai nghiệm của phương trình: . Không giải phương trình hãy lập phương trình bậc hai ẩn  có hai nghiệm ;  thỏa mãn:  và .

**Hướng dẫn giải**

Xét phương trình có  nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-et ta có: 



Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm ;  là :  .

**Bài 5.** Gọi  là hai nghiệm của phương trình:. Không giải phương trình hãy lập phương trình bậc hai ẩn  có hai nghiệm ;  thỏa mãn:

a) . b).

**Hướng dẫn giải**

Xét phương trình có  nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt. Theo hệ thức Vi-et ta có: 

a) Ta có: 

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm ;  là :  .

b) Ta có: 

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm ;  là :  .

# **Dạng 3: Phương trình chứa tham số**

**Các điều kiện để phương trình có nghiệm thỏa mãn đặc điểm cho trước:**

a) Tìm điều kiện tổng quát để phương trình ** có:**

1. Có nghiệm (có hai nghiệm) 

2. Vô nghiệm 

3. Nghiệm duy nhất (*nghiệm kép, hai nghiệm bằng nhau*)  (Nếu thì )

4. Có hai nghiệm phân biệt (*khác nhau*) 

5. Hai nghiệm cùng dấu  và 

6. Hai nghiệm trái dấu  và  (hoặc )

7. Hai nghiệm dương (lớn hơn 0) ; và 

8. Hai nghiệm âm (nhỏ hơn 0) ; và 

9. Hai nghiệm đối nhau  và 

10. Hai nghiệm nghịch đảo của nhau và 

11. Hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn   và 

12. Hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn  và 

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt sao cho (với là một số thực)

1- Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt .

2- Áp dụng định lý Vi – ét tìm: (1) và  (2)

3- Kết hợp (1) và (3) giải hệ phương trình: 

4- Thay  và  vào (2) Tìm giá trị tham số.

c) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện: 

- Bình phương trình hai vế: 

- Áp dụng định lý Vi-ét tính  và  thay vào biểu thức kết luận.

d) Hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào ;

- Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

- Áp dụng định lý Vi-ét tìm  (1) và  (2)

- Biến đổi kết quả không chứa tham số nữa.

**4) So sánh nghiệm của phương trình bậc hai với một số bất kỳ:**

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm ()

Bước 2: Áp dụng Vi-ét tính  và  (\*)

+/ Với bài toán: Tìm để phương trình có hai nghiệm 

 Thay biểu thức Vi-ét vào hệ để tìm 

+/ Với bài toán: Tìm để phương trình có hai nghiệm 

 Thay biểu thức Vi-ét vào hệ để tìm 

+/ Với bài toán: Tìm để phương trình có hai nghiệm, trong đó có 1 nghiệm , nghiệm kia   Thay biểu thức Vi-ét vào hệ để tìm 

**Bài 1:** Cho phương trình  ( là ẩn số)

a) Tìm điều kiện của  để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b) Định  để hai nghiệm ,  của phương trình đã cho thỏa mãn: .

**Hướng dẫn giải**

a) 

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi  

b) Phương trình có hai nghiệm 

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: 

Theo đề bài: 



****

** (\*\*)**

Từ (\*) và (\*\*) ta có hệ phương trình: 

Mặt khác ta có: 







Kết hợp với điều kiện  (thỏa mãn) là các giá trị cần tìm.

Vậy với  hoặc  thì phương trình đã cho có 2 nghiệm ,  thỏa mãn: .

*Phân tích:* Đối với yêu cầu đề toán, sau khi ta thế từ hệ thức Vi-et ta được một phương trình liên hệ giữa  thì ta sẽ lập được một hệ phương trình từ đó giải hệ phương trình với ẩn ta sẽ tìm được ra và . Thay vào phương trình ta sẽ giải được ra tham số cần tìm.

**Bài 2:** Tìm  để phương trình  ( là ẩn số,  là tham số) có hai nghiệm ,  thỏa mãn 

**Hướng dẫn giải**



Để phương trình có hai nghiệm 

Áp dụng hệ thức Vi-ét 

Ta có: 











Kết hợp  suy ra  Thay vào  suy ra  (thỏa mãn )

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 3:** Cho phương trình  ( là tham số)

a) Giải phương trình đã cho với .

b) Tìm các giá trị của tham số  để phương trình đã cho có hai nghiệm ***phân biệt*** ,  thỏa điều kiện 

**Hướng dẫn giải**

**a)** Với  phương trình đã cho trở thành 

Ta có  nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là 

b) 

Điều kiện phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là  (\*)

Theo hệ thức Vi-ét ta có:



từ (\*) và giả thiết  ta có hệ phương trình: 

Thay vào phương trình (\*\*) ta có: 

Với ta có  không thỏa mãn điều kiện phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Với  ta có  thỏa mãn điều kiện để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Kết luận: Vậy với  thì phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt ,  thỏa điều kiện .

**Bài 4:** Cho phương trình  ( là tham số)

a) Giải phương trình đã cho với .

b) Tìm  để phương trình có hai nghiệm phân biệt ,  thỏa mãn điều kiện 

**Hướng dẫn giải**

a) Với , phương trình đã cho trở thành: 



Vậy với  thì nghiệm của phương trình đã cho là .

b) 

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt 

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: 

Do đó:





Kết hợp với điều kiện  là các giá trị cần tìm.

**Bài 5:** Cho phương trình  ( là tham số).

a) Giải phương trình đã cho với  .

b) Tìm  để phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn 

**Hướng dẫn giải**

a) Với  phương trình trở thành 

. Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt 

b) Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì 



Để phương trình có nghiệm khác 0 



Áp dụng hệ thức Vi-et ta có 

Theo bài ra có 



Kết hợp với điều kiện ; ta được 

Vậy  là các giá trị cần tìm.

**Bài 6:** Cho phương trình  ( là tham số).

a) Tìm  để phương trình đã cho có nghiệm.

b) Tìm  để phương trình đã cho có hai nghiệm sao cho nghiệm này bằng ba lần nghiệm kia.

**Hướng dẫn giải**

a) Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi 







Vậy  thì phương trình đã cho có nghiệm.

b) Với  thì phương trình đã cho có hai nghiệm.

Gọi một nghiệm của phương trình đã cho là  thì nghiệm kia là . Theo hệ thức Vi-ét, ta có: 

Từ phương trình (1) thế vào phương trình (2) ta có 

 có  .

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt:

(thỏa mãn điều kiện  )

Vậy  là các giá trị cần tìm.

**Bài 7:** Cho phương trình  ( là tham số)

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi .

b) Tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình trên theo .

c) Tìm  để phương trình trên có hai nghiệm thỏa: 

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có , với mọi 

Vì , với mọi nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi .

b) Với mọi , phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  thỏa hệ thức Vi-ét:



c) Ta có  (do trên) và  nên ta có hệ phương trình sau:





Thay  vào biểu thức  ta được:



Vậy  là các giá trị cần tìm.

**Bài 8:** Cho phương trình  ( là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình đã cho mà không phụ thuộc vào .

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của  (với ,  là nghiệm của phương trình đã cho)

**Hướng dẫn giải**

a) , 

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có: 

 không phụ thuộc vào .

c) 

, 

Do đó  và dấu  xảy ra khi 

Vậy  với .

**Bài 9:** Cho phương trình  ( là tham số). Tìm  để phương trình có hai nghiệm ,  thỏa mãn 

**Hướng dẫn giải**

Phương trình 

Điều kiện PT có 2 nghiệm không âm ,  là



Theo hệ thức Vi-ét: 

Ta có 

 (thoả mãn)

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 10:**  Cho phương trình  ( là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi .

b) Tìm giá trị của  để phương trình có hai nghiệm ,  thỏa mãn 

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có 

, 

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi .

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có  (I)

Theo giả thiết  (II)

Thay (I) vào (II) ta có: , đúng với mọi .

Vậy với mọi  thì phương trình trên có hai nghiệm ,  thỏa mãn 

**Bài 11:** Cho phương trình  (1) ( là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu.

b) Gọi ,  là các nghiệm của phương trình (1):

Tính giá trị của biểu thức: 

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có , với  nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu với mọi .

b) Ta có  là nghiệm của phương trình (1) nên ta có:và 

hay 

Do đó 

 vì , .

Vậy .

**Bài 12:** Xác định giá trị  trong phương trình  để  là nghiệm của phương trình. Với  vừa tìm được, phương trình đã cho còn một nghiệm nữa. Tìm nghiệm còn lại.

**Hướng dẫn giải**

Do  là nghiệm của phương trình nên thỏa mãn phương trình:





Thay vào phương trình ta được phương trình:  



Phương trình  có hai nghiệm phân biệt là: 

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 13:** Cho phương trình  ( là tham số).

a) Tìm  để phương trình có nghiệm . Tính nghiệm còn lại.

b) Tìm  để hai nghiệm phân biệt ,  thỏa mãn hệ thức 

**Hướng dẫn giải**

a) Vì phương trình  có nghiệm  nên ta có:

.

Ta có phương trình: 

Ta có  nên phương trình có hai nghiệm: ; 

Vậy  và nghiệm còn lại là .

b) 

Phương trình có hai nghiệm phân biệt 

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: 

Ta có 









 (thỏa mãn điều kiện)

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 14:**  Cho phương trình  ( là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị .

b) Tìm  để hai nghiệm của phương trình có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

c) Tìm  để hai nghiệm đó là số đo của 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng 3.

**Hướng dẫn giải**

a) , .

Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị .

b) Hai nghiệm của phương trình là 

Theo đề bài ta có  

c) Giả sử phương trình có hai nghiệm là . Theo đề bài đó là số đo của 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng 3 nên ta có 

Vậy ta có:



Vậy  là các giá trị cần tìm.

**Bài 15:** Cho phương trình  ( là tham số)

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi .

b) Tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình trên theo .

c) Tìm  để phương trình trên có hai nghiệm thỏa: 

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có , với mọi 

Vì , với mọi nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi .

b) Với mọi , phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  thỏa hệ thức Vi-ét:



c) Ta có  (do trên) và  nên ta có hệ phương trình sau:





Thay  vào biểu thức  ta được: 

Vậy  là các giá trị cần tìm.

**Bài 16:** Tìm tất cả các số tự nhiên  để phương trình  ( là tham số) có nghiệm nguyên.

**Hướng dẫn giải**



Phương trình có nghiệm nguyên khi  là số chính phương

Nếu  thì  (loại)

Nếu  thì  (nhận)

Nếu  thì 







 không là số chính phương.

Vậy là giá trị cần tìm

**Bài 17:** Cho phương trình: 

a) Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Tính theo m biểu thức  rồi tìm  để  .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: 









Do  nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Theo câu a,  nên phương trình luôn có hai nghiệm thỏa hệ thức Vi-ét:



Có: 



Để thì  suy ra  hay  Ư(4)=

Lập bảng:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 |

Vậy  thì .

**Bài 18:** Cho phương trình:   với  là ẩn số.

a) Chứng tỏ phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt 

b) Tìm giá trị của m để hai nghiệm của phương trình thỏa hệ thức 

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: 



Do  nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Theo câu a,  nên phương trình luôn có hai nghiệm thỏa hệ thức Vi-ét: 

Có  là nghiệm của phương trình nên ta có

Theo đề toán: 







Thay  vào ,ta được: 













.

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 19:** Cho phương trình:   với  là ẩn số.

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi .

b) Tìm giá trị của  để hai nghiệm của phương trình thỏa hệ thức  .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: 

Do  nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Theo câu a,  nên phương trình luôn có hai nghiệm thỏa hệ thức Vi-ét: 

Có: 

TH1:  thay vào  .Ta được:  (vô lý)

TH2:  thay vào . Ta được: 

Vậy  là giá trị cần tìm .

**Bài 20:** Cho phương trình:   ( là tham số).

a) Giải phương trình trên khi  .

b) Tìm  để phương trình trên có hai nghiệm  thỏa mãn:.

**Hướng dẫn giải**

a) Với phương trình trở thành  

. Suy ra phương trình có hai nghiệm: 

b) Ta có: 

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm  thì .

Kết hợp với hệ thức Vi-ét, ta có :

 . Giải hệ  : 

Từ  và  suy ra: . Thử lại thì thoả mãn. Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 21:** Cho phương trình . Định  để phương trình có 4 nghiệm phân biệt và tổng bình phương tất cả các nghiệm bằng 10

**Hướng dẫn giải**

Đặt 

Phương trình trở thành  (1)

Phương trình có 4 nghiệm phân biệt ⇔ (1) có 2 nghiệm phân biệt dương

 (I)

Với điều kiện (I), (1) có 2 nghiệm phân biệt dương , .

⇒ Phương trình đã cho có 4 nghiệm

 ;





Vậy ta có 

Với , (I) thỏa mãn

Với , (I) không thỏa mãn.

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 22:** Cho phương trình:

a) Tìm  để phương trình  có hai nghiệm.

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm âm.

c) Tìm  để phương trình  có hai nghiệm ,  thỏa mãn .

**Hướng dẫn giải**

a)  với mọi giá trị của m.

Vậy phương trình  luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi .

b) Theo Vi-et ta có: 

Để phương trình  có hai nghiệm âm thì:   

Vậy với  thì phương trình  luôn có hai nghiệm âm.

c) Với  suy ra 

Theo giả thiết, ta có:   

  .

**Bài 23:** Cho phương trình: 

a) Giải phương trình khi  .

b) Tìm  để phương trình có hai nghiệm  thỏa mãn 

c) Tìm đẳng thức liên hệ giữa  không phụ thuộc vào .

d) Với giá trị nào của  thì  cùng dương.

**Hướng dẫn giải**

a) Với  phương trình trở thành

. Ta có  . Vậy phương trình có 2 nghiệm

 

Vậy phương trình có tập nghiệm 

b) Ta có 



Vì  với mọi  nên  với mọi 

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm  với mọi 

Theo hệ thức Vi-et ta có :



Kết hợp  và (1) ta có hệ



Thay  vào pt (2) ta có









. Vậy 

c) Theo Vi-et ta có:





Vậy hệ thức liên hệ  có giá trị không phụ thuộc vào .

d) Theo câu b phương trình luôn có nghiệm với mọi 

Để phương trình có hai nghiệm cùng dương thì



Vậy không có giá trị nào của  để phương trình có hai nghiệm dương.

**Bài 24:** Cho phương trình bậc hai: 

a) Tìm giá trị  để phương trình có một nghiệm lớn hơn  và một nghiệm nhỏ hơn .

b) Tìm giá trị  để phương trình có hai nghiệm đều nhỏ hơn .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:  Nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo hệ thức Vi- ét ta có



Để phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn , một nghiệm nhỏ hơn  thì 







***Cách 2:*** Đặt  thì phương trình (1) trở thành:





Để phương trình (1) có một nghiệm  lớn hơn , một nghiệm  nhỏ hơn  thì phương trình (2) có hai nghiệm  trái dấu  

b) Để phương trình có hai nghiệm đều nhỏ hơn 2 thì 

**Bài 25:** Cho phương trình  

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Xác định  để phương trình có một nghiệm bằng.Tìm nghiệm còn lại.

c) Xác định  để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn 

d) Xác định  để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm kia.

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: 





Phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi .

b) Vì phương trình có một nghiệm bằng  nên ta thay  vào phương trình có:











Theo hệ thức Vi-et ta có:  thay  :

•Với  thay vào ta có: 

•Với  thay vào ta có: 

c) Theo trên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa: 

Vì  nên 





 

Vậy 

**Cách 2**: Ta tính   Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt :



Vì  nên 



d) Phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm kia :

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt :; 

Theo yêu cầu đề toán : nghiệm này bằng bình phương nghiệm kia :

Trường hợp 1:









Trường hợp 2 : 

 (\*)





 Phương trình (\*) vô nghiệm.

Kết luận: là giá trị cần tìm

**Bài 26:**  Cho phương trình 

a) Xác định  để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Xác định  để phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

c) Tìm một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào .

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Hướng dẫn giải**

a) Để phương trình có hai nghiệm trái dấu thì  và 





b) Để phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì

  



c) Để phương trình đã cho có nghiệm  thì  và 

Khi đó theo Vi-ét ta có:  

 .

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào .

d) Với  và  thì phương trình luôn có hai nghiệm thỏa mãn



Ta có: 













 . Dấu “=” xảy ra khi  (tm)

Vậy GTNN của  là  xảy ra khi 

**Bài 27:**  Cho phương trình bậc hai 

a) Tìm  để phương trình có hai nghiệm đối nhau.

b) Tìm  để phương trình có hai nghiệm nghịch đảo nhau.

**Hướng dẫn giải**

a) Xét phương trình 

Để để phương trình có hai nghiệm đối nhau thì:



(luôn đúng với mọi )  (thỏa mãn)

Vậy  thì phương trình có hai nghiệm đối nhau.

b) Xét phương trình 

Để để phương trình có hai nghiệm nghịch đảo nhau thì:



(luôn đúng với ) (thỏa mãn)

Vậy  thì phương trình có hai nghiệm nghịch đảo nhau.

**Bài 28:** Tỉm giá trị m để phương trình:

a)  có 2 nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

b)  có 2 nghiệm trái dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối.

**Hướng dẫn giải**

a) Xét phương trình  để phương trình có hai nghiệm trái dấu thì:  . 

Với  , áp dụng hệ thức Vi – ét ta có:



Có nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương suy ra :

 trong đó  nên  . 

Từ và  suy ra  .

Vậy  thì phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

***Chú ý:*** *Đề bài có nghĩa tìm điều kiện để phương trình có 2 nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm âm.*

b) *** có hai nghiệm trái dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối.***

Xét phương trình: **** (2)** có:

()

PT **(2)** có 2 nghiệm trái dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối



Vậy với m = 1 thì pt đã cho có hai nghiệm trái dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối.

**Bài 29:** Cho phương trình:  (1)

a) Giải phương trình khi 

b) Tìm  để pt (1) có nghiệm.

c) Tìm  để (1) có hai nghiệm  thỏa mãn 

**Hướng dẫn giải**

a) Thay  vào (1) ta có: 

Vậy với  thì phương trình có nghiệm 

b) Ta có: 

Để pt (1) có nghiệm thì 

Vậy với  thì pt (1) có nghiệm.

c) Áp dụng hệ thức Viet ta có: 









Ta có: 

Phương trình (2) có hai nghiệm 

Vậy với  thì pt (1) có hai nghiệm  thỏa mãn .

**Bài 30:**  Cho phương trình 

a) Xác đinh  để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó

b) Xác định  để phương trình có một nghiệm bằng  . Tính nghiệm còn lại.

c) Với điều kiện nào của  thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu (trái dấu)

d) Với điều kiện nào cửa  thì phương trình có hai nghiệm cùng dương (cùng âm)

e) Định  để phương trình có hai nghiệm sao cho nghiệm này gấp đôi nghiệm kia

f) Định  để phương trình có hai nghiệm  thỏa mãn 

g) Định  để PT có hai nghiệm  sao cho  nhận giá trị nhỏ nhất.

**Hướng dẫn giải**

a) 

Để PT có nghiệm kép 

b) là một nghiệm của phương trình nên ta có





Với  phương trình trở thành







Vậy nghiệm còn lại của phương trình là 

c)

Phương trình có hai nghiệm. Áp dụng đinh lý Vi-et:



- Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu

- Để phương trình có hai nghiệm trái dấu 

d) với  PT có hai nghiệm cùng dấu .

TH1:  cùng dấu dương



Kết hợp với điều kiện  

TH2:  cùng dấu âm



với điều kiện 

Vậy không có giá trị  để phương trình có hai nghiệm cùng dấu âm

e) Áp dụng đinh lý Vi-et:

 (\*)

 (\*\*)

Không mất tính tổng quát ta giả sử: 

Kết hợp với (\*) ta có hệ phương trình: 

Thay vào phương trình (\*\*) ta có







 . Thỏa mãn.

Vậy với  thì phương trình đã cho có 2 nghiệm thỏa mãn nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia.

f) Định  để phương trình có hai nghiệm  thỏa mãn 



Từ phương trình (1) và (2) ta có hệ phương trình



Thay vào phương trình (3) ta có: 



 (thỏa mãn).

Vậy với m = 0 hoặc  thì phương trình có hai nghiệm  thỏa mãn 

g) 











 . Dấu  xảy ra 

Vậy  để  đạt giá trị nhỏ nhất.

# **🗁. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

1. Giải các phương trình:
2. ;
3. .
4. Cho phương trình: 
5. Chứng minh rằng phương trình  luôn có nghiệm  với mọi giá trị của ;
6. Tìm  để phương trình  có nghiệm kép;
7. Tìm  để phương trình  có nghiệm .
8. Không giải phương trình, hãy tính tổng các bình phương và hiệu các bình phương các nghiệm của phương trình:
9. ;
10. .
11. Không giải phương trình, xét dấu các nghiệm của phương trình sau:
12. ;
13. ;
14. .
15. Cho phương trình 
16. Chứng minh rằng phương trình  luôn có nghiệm với mọi ;
17. Tìm  để phương trình có một nghiệm là . Khi đó tìm nghiệm thứ hai của phương trình.
18. Cho phương trình 
19. Chứng tỏ rằng phương trình  luôn có hai nghiệm phân biệt  với mọi giá trị của ;
20. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm  không phụ thuộc vào , từ đó hãy biểu thị  theo ;
21. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức 
22. Cho phương trình 
23. Xác định  để phương trình  có nghiệm;
24. Xác định  để phương trình  có hai nghiệm phân biệt  sao cho .
25. Cho phương trình .

Tìm  để phương trình có hai nghiệm  sao cho:

1. ;
2. .
3. Cho phương trình .

Tìm các giá trị của  để phương trình có hai nghiệm  thỏa mãn 

1. Cho phương trình 
2. Xác định  để phương trình  có nghiệm;
3. Xác định  để phương trình  có nghiệm âm.